Math. P.
741
b

Anleitung
zur
Differential-
rechnung
von
Gerh. Ulr. Ant.
Vieth

Math. P. 741 b

412
oo

Kurze Anleitung
zur
Differentialrechnung

als Ergänzung
zum
Lehrbuche der reinen Mathematik.

Von
Gerhard Ulrich Anton Vieth,
Herzogl. Anhalt-Deßauischem Schulrathe und Professor der Mathematik.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
MINISTERIALFORSTBUREAU
ibi
Aa²
53

Leipzig,
bei Joh. Ambr. Barth.
1823.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN
Gd/63/3161

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Differentialrechnung.

Diese kurze Anleitung zur Differentialrechnung kann als Ergänzung zum Lehrbuch der reinen Mathematik angesehen, und demselben angebunden werden.

Erster Abschnitt.

Methode des Differentiirens.

§. 1.

Erklärung. Differentiale nennt man die unendlich kleinen Änderungen stetig wachsender oder abnehmender Größen. Bei wachsenden Größen sind es unendlich kleine Zunahmen (Incremente), bei abnehmenden Größen sind es unendlich kleine Abnahmen (Decremente). Wenn die veränderlichen Größen x und y sind, so bezeichnet man ihre Differentiale durch dx und dy.

Differentiiren heißt: aus den Eigenschaften einer veränderlichen Größe ihr Differential finden.

Integriren heißt: umgekehrt, aus den Eigenschaften des Differentials die veränderliche Größe selbst finden, aus der es entstanden ist.

Die Änderungen einer veränderlichen Größe hängen von den Änderungen einer oder mehrerer andern ab, z. B. die Änderung der Ordinaten einer krummen Linie von denen der Abscissen; jede ist eine Funktion der andern; z. B. im Kreise ist $y = \sqrt{2rx - x^2}$ und $x = r \pm \sqrt{r^2 - y^2}$.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Die Differentialrechnung wurde von Leibnitz und Newton erfunden. Leibnitz machte seine Methode bekannt in den Actis eruditorum Lips. 1684.; Newton die seinige in den Princip. philos. nat. mathem. Lond. 1687. Letzterer nennt die Differentiale Fluxionen und bezeichnet sie durch $\dot{x}$; $\dot{y}$. Beide Methoden sind wesentlich einerlei; beide Erfinder können leicht, ohne von einander zu entlehnen, jeder für sich, darauf gekommen seyn, weil schon manches dazu vorbereitet war.

§. 2. Zusatz. Ein Differential ist, in Vergleichung mit einer endlichen Größe, als Null anzusehen und kann, wenn es addirt oder subtrahirt ist, weggelassen werden. Man kann $x+dx$ mit dem bloßen x als gleich ansehen, und $x+dx : y+dy$ ist mit dem Verhältniß $x : y$ einerlei.

Da ferner $1 : dx = dx : (dx)^2$, so ist $(dx)^2$ als ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, wiederum gegen dx als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, als Null anzusehen,

dx verschwindet gegen x
$(dx)^2$ verschwindet gegen dx
$(dx)^3$ verschwindet gegen $(dx)^2$ u. s. w.

§. 3. Aufgabe. Das Differentia der Summe zweier veränderlicher Größen zu finden; eine Summe zu differentiiren.

Auflösung. Es sey

$$w = x + y,$$

also ist $w + dw = x + dx + y + dy,$

folglich $dw = dx + dy,$

oder $d(x + y) = dx + dy.$

§. 4. Aufgabe. Das Differential des Unterschiedes zweier veränderlicher Größen zu finden; einen Unterschied zu differentiiren.

Auflösung. Es sey

$$w = x - y,$$

also ist $w + dw = x + dx - (y + dy),$

folglich $dw = dx - dy,$

oder $d(x - y) = dx - dy.$

§. 5. Aufgabe. Ein Produkt zu differentiiren.

Auflösung. Es sey

$$w = xy,$$

also $w + dw = (x + dx)(y + dy)$

$= xy + xdy + ydx + dxdy,$

folglich $dw = xdy + ydx,$

weil das letzte Glied $dxdy$ gegen die vorhergehenden verschwindet.

Ein Rechteck kann zur Versinnlichung dienen.

§. 6. Aufgabe. Einen Quotienten (Bruch) zu differentiiren.

Auflösung. 1) Es sey $w = \frac{x}{y}$ Zähler und Nenner veränderlich,

also $w + dw = \frac{x + dx}{y + dy},$

Die Division ausgeführt giebt

$$w + dw = \frac{x}{y} + \frac{ydx - xdy}{y^2 + ydy},$$

folglich $$dw = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

weil im Nenner das letzte Glied ydy gegen das erste y^2 verschwindet.

Oder auch so geschlossen

$$w = \frac{x}{y}$$
$$wy = x.$$

Dies nach §. 4. differentiirt

$$wdy + ydw = dx$$
$$ydw = dx - wdy$$
$$y^2 dw = ydx - wydy$$
$$= ydx - xdy$$
$$dw = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

2) Wenn $w = \frac{a}{y}$ nämlich der Zähler eine beständige Größe,

so ist $$wy = a$$
$$wdy + ydw = \text{Null}$$
$$ydw = -wdy$$
$$y^2 dw = -ady$$
$$dw = \frac{-ady}{y^2}$$

also auch $$-dw = \frac{ady}{y^2}.$$

3) Wenn $w = \frac{y}{a}$ nämlich der Nenner eine beständige Größe,

so ist $dw = \frac{dy}{a}$,

wie an sich klar ist.

§. 7. Aufgabe. Eine Potenz zu differentiiren.

Auflösung. Es sey $x = y^m$ also $x + dx = (y + dy)^m$.

Erstens. Sey der Exponent m eine ganze Zahl. Nun ist

$$\begin{array}{llll}
(y+dy)^1 = & y & + dy & \\
(y+dy)^2 = & y^2 & + 2y dy & + (dy)^2 \\
(y+dy)^3 = & y^3 & + 3y^2 dy & + Ny (dy)^2 \ldots\ldots \\
(y+dy)^4 = & y^4 & + 4y^3 dy & + Ny^2 (dy)^2 \ldots\ldots \\
(y+dy)^5 = & y^5 & + 5y^4 dy & + Ny^3 (dy)^2 \ldots\ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(y+dy)^m = & y^m & + my^{m-1} dy & + Ny^{m-2} (dy)^2 \ldots
\end{array}$$

Aus dem Gange der successiven Multiplication jeder vorhergehenden Potenz mit der Wurzel $y + dy$ ist klar,

daß das erste Glied der Potenz immer y^m seyn müsse;

daß das zweite Glied enthalten müsse y in der $m-1^{ten}$, dy in der ersten und den Koeffizienten $= m$;

daß das dritte Glied enthalten müsse y in der $m-2^{ten}$; dy in der zweiten und einen Koeffizienten N, um dessen Größe wir uns hier weiter nicht bekümmern.

Und überhaupt, daß die Potenzen von y abnehmen und die von dy steigen.

Nun aber; da die höhern Potenzen von dy gegen die vorhergehenden verschwinden, so ist schon, das dritte Glied jeder Potenz, da es $(dy)^2$ enthält, gegen die beiden Anfangsglieder Null,

folglich $(y + dy)^m = y^m + my^{m-1} dy$

folglich $d(y^m) = my^{m-1} dy$.

Da hier von jeder Potenz nur die beiden Anfangsglieder gebraucht werden, deren Bildung aus dem Gange der successiven Multiplikation völlig klar ist, so wird das Gesetz, nach welchen sich Potenzen zweitheiliger Größen bilden, deren beide Theile endlich sind, hier nicht als bekannt angenommen und nicht gebraucht, sondern im Gegentheile; wir werden aus dem, was für einen unendlich kleinen zweiten Theil klar ist, das Gesetz der Potenzenbildung allgemein beweisen. (§. 10.)

Zweitens. Sey m ein Bruch $= \frac{n}{r}$.

Also $x = y^{\frac{n}{r}}$,

folglich $x^r = y^n$.

Da hier n und r für sich ganze Zahlen sind, so differentiire man nach der eben gezeigten Art;

also $rx^{r-1} dx = ny^{n-1} dy$,

multiplicire mit x,

so ist $rx^r dx = nxy^{n-1} dy$,

das ist $ry^n dx = nxy^{n-1} dy$,

dividire mit y^n,

so ist $rdx = \frac{nxdy}{y}$;

statt x dessen Werth gesetzt

$$r dx = \frac{n y^{\frac{n}{r}} dy}{y},$$

das ist

$$= n y^{\frac{n}{r} - 1} dy$$

und

$$dx = \frac{n}{r} y^{\frac{n}{r} - 1} dy.$$

Also: auch wenn m einen Bruch bedeutet, ist dx oder $d(y^m) = my^{m-1} dy$.

Der Exponent m kann auch negativ (ganz oder gebrochen) seyn. Denn es ist

$$d\frac{1}{y^m} = \frac{-dy^m}{y^{2m}} = \frac{-my^{m-1} dy}{y^{2m}},$$

also $dy^{-m} = -my^{-m-1} dy$.

§. 8. Zusatz. Das Differential einer Potenz durch das m fache Differential der Wurzel dividirt, giebt die um einen Grad niedrigere Potenz

$$\frac{d(y^m)}{mdy} = y^{m-1}.$$

§. 9. Zusatz. Der ebengenannte Quotient mit der Wurzel multiplizirt, giebt die anfängliche Potenz

$$y \cdot \frac{d(y^m)}{mdy} = y^m.$$

Wir werden das sogleich brauchen, um für eine Potenz y^m zwei gleich geltende Ausdrücke zu bilden.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeines Potenzengesetz.

§. 10. Aufgabe. Die Potenz einer zweitheiligen Größe, deren beide Theile endlich sind, zu finden.

Auflösung. Die vorgegebene Wurzel sey $= a + b$.

Man setze $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + y)$

also $(a + b)^m = a^m (1 + y)^m$.

Es sey $(1 + y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots$

Daß die Reihe diese Gestalt habe, nämlich daß die Glieder nach der Folge immer höhere Potenzen von y enthalten, ist aus dem Gange der successiven Multiplication völlig klar. (§. 7.) Die Koeffizienten lassen wir noch ganz unbekannt seyn (selbst den ersten A, obgleich von diesem aus §. 7. erhellt, daß er $= m$ sey). Sie werden sich dadurch ergeben, daß man nach §. 9. durch Differentiiren eine zweite gleich geltende Reihe für die Potenz $(1 + y)^m$ sucht.

Man differentiire nämlich die obige Reihe, so ist

$$m(1 + y)^{m-1} dy = Ady + 2Bydy + 3Cy^2 dy \ldots$$

und mit mdy dividirt

$$(1 + y)^{m-1} = \frac{A}{m} + \frac{2B}{m} y + \frac{3C}{m} y^2 \ldots\ldots$$

und mit $1 + y$ multiplizirt

$$(1+y)^m = \frac{A}{m} + \left.\begin{matrix}\frac{2B}{m} \\ + \frac{A}{m}\end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix}\frac{3C}{m} \\ + \frac{2B}{m}\end{matrix}\right\} y^2 \ldots\ldots$$

Beide Reihen für $(1+y)^m$ in Gleichung gestellt, müssen die zu einerlei Potenz von y gehörigen Koeffizienten gleich seyn,

nämlich $\frac{A}{m} = 1$ folgl. $A = m$

$$\frac{2B}{m} + \frac{A}{m} = A \text{ folgl. } B = A . \frac{m-1}{2}$$

$$\frac{3C}{m} + \frac{2B}{m} = B \text{ folgl. } C = B . \frac{m-2}{3}$$

$$\frac{4D}{m} + \frac{3C}{m} = C \text{ folgl. } D = C . \frac{m-3}{4}$$

u. s. w.

Diese recurrirenden in die absoluten verwandelt

$$A = m$$

$$B = \frac{m.(m-1)}{1 . 2}$$

$$C = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1 . 2 . 3}$$

$$D = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$$

u. s. w.

Also $(1+y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots\ldots$

und $a^m(1+y)^m = a^m + Aa^m y + Ba^m y^2 + Ca^m y^2 \ldots\ldots$

oder $(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 \ldots\ldots$

Exempel. Die Quadratwurzeln von $1+y$ und $1-y$ finden sich nach obigen so:

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{5}{128}y^4 + \tfrac{7}{256}y^5 \ldots$$

$$(1-y)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8}y^2 - \tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{5}{128}y^4 - \tfrac{7}{256}y^5 \ldots$$

Die Koeffizienten nehmen nicht sehr stark ab. Wenn die Reihe sich schnell nähern soll, muß $y = \frac{b}{a}$ ein kleiner Bruch, also b klein gegen a seyn.

§. 11. Zusatz. Ist der Exponent m negativ, so ist

$$A = -m$$

$$B = \frac{-m-1}{2} A$$

$$C = \frac{-m-2}{3} B$$

$$D = \frac{-m-3}{4} C \quad \text{u. s. w.}$$

Exempel. Ist zum Beispiel $m = -\frac{1}{2}$, so ist

$$A = \ldots\ldots - \tfrac{1}{2}$$

$$B = \frac{-1\frac{1}{2}}{2} \cdot -\tfrac{1}{2} = +\tfrac{3}{8}$$

$$C = \frac{-2\frac{1}{2}}{3} \cdot \tfrac{3}{8} = -\tfrac{5}{16}$$

$$D = \frac{-3\frac{1}{2}}{4} \cdot -\tfrac{5}{16} = +\tfrac{35}{128}$$

$$E = \frac{-4\frac{1}{2}}{5} \cdot \tfrac{35}{128} = -\tfrac{63}{256}$$

u. s. w.

Also $(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{8}y^2 - \tfrac{5}{16}y^3 + \tfrac{35}{128}y^4 \ldots$

und $(1-y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{8}y^2 + \tfrac{5}{16}y^3 + \tfrac{35}{128}y^4 \ldots$

Dritter Abschnitt.

Allgemeiner Ausdruck der Logarithmen.

§. 12. **Lehrsatz.** In jeder geometrischen Progression ist die vierte Proportionale zum Unterschiede der Glieder, Unterschiede der Logarithmen und Vorgliede, eine beständige Größe.

Beweis. Es seyen einer geometrischen Progression

Glieder	1	b	b^2	b^3	..	b^n	b^{n+1}
Untrsch.		$(b-1)$	$b(b-1)$	$b^2(b-1)$	..	..	$b^n(b-1)$
Logar.	0	1	2	3	..	n	$n+1$
Untrsch.		1	1	1	..	1	1

Es verhält sich nun für zwei Glieder b^n und b^{n+1},

$b^n(b-1) : 1 = b^n : \frac{1}{b-1}$, wo das letzte Glied eine beständige Größe ist.

Oder auch für zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Glieder, z. B. b^n und b^{n+v}.

Hier ist der Unterschied der Glieder $b^{n+v} - b^n = b^n(b^v - 1)$.

Unterschied der Logarithmen $= v$; Vorglied wie vorhin $= b^n$. Also:

$$b^n(b^v-1) : v = b^n : \frac{v}{b^v-1},$$

wo letzteres für alle gleich weit von einander liegende Glieder, deren Exponenten (Logarithmen) um v unterschieden sind, einerlei bleibt.

§. 13. Lehrsatz. Jede Zahl kann betrachtet werden als ein Glied einer geometrischen Progression von beliebiger Basis.

Beweis. Zwischen die Hauptglieder der Progression

$$1;\ b;\ b^2;\ b^3 \ldots\ b^n;\ b^{n+1} \ldots$$

wo die Basis b auf ganze Potenzen erhoben ist, lassen sich unendlich viele Zwischenglieder einschalten, die daher jedes vom vorhergehenden unendlich wenig unterschieden sind. Unter diesen müssen folglich nothwendig alle mögliche Zahlen enthalten seyn.

Das erste dieser Zwischenglieder, welches also unendlich wenig von 1 unterschieden ist, soll die Stammwurzel heißen und durch w bezeichnet werden. Ihr unendlich kleiner Unterschied von 1 oder das erste Increment der Reihe sey $= i$ also $w = 1 + i$.

Die Basis b sey die n^{te} Potenz dieser Stammwurzel; $b = w^n = (1+i)^n$,

also $b = 1 + ni + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} i^2$ u. s. w. (§. 10.)

§. 14. Lehrsatz. Die vierte Proportionale zum Differential eines Gliedes der geometrischen Progression, dem Differential des Logarithmen und dem Gliede selbst ist eine beständige Größe.

Beweis. Der Satz sagt bloß für unendlich wenig von einander unterschiedenen Glieder dasselbe, was §. 12. für die Hauptglieder bewiesen wurde.

Es seyen zwei unendlich wenig von einander unterschiedne Glieder der Progression y und $y + dy$.

Und es sey $y = b^x$

$$y + dy = b^{x+dx},$$

nämlich Unterschied der Glieder $= dy$
und Unterschied der Logarithmen $= dx$;
so ist $dy = b^{x+dx} - b^x = b^x(b^{dx} - 1)$.

Die vierte Proportionale sey M.

Also	Untersch. d. Glied.	: Untersch. d. Log.	= Vorglied	: M
	dy	: dx	$= b^x$	: M
das ist	$b^x(b^{dx} - 1)$	: dx	$= b^x$	: M
oder	$b^{dx} - 1$	: dx	$= 1$	: M

Aber die Logarithmen machen eine arithmetische gemeine Progression, wo die Unterschiede gleich sind, also hier dx unveränderlich, folglich ist auch

$M = \frac{dx}{b^{dx} - 1}$ unveränderlich.

Für das Anfangsglied 1 und die unendlich wenig davon unterschiedene Stammwurzel (§. 13.) $w = 1 + i$, ist also auch

$$i : dx = 1 : M,$$

oder wenn man dx als einen unendlich kleinen Bruch $= \frac{1}{n}$ ausdrückt, wo der Nenner n eine unendlich große Zahl ist

$$i : \frac{1}{n} = 1 : M$$

also $$M = \frac{1}{ni}$$

und $$i = \frac{1}{nM}.$$

Von dem Verhältniß des ersten Increments des Gliedes i, zum Increment des Logarithmen $\frac{1}{n}$ hängt es ab, wie groß M wird.

§. 15. Erklärung. Man nennt die im vorigen Satze betrachtete vierte beständige Proportionale, den Model des Logarithmensystems. Ein Logarithmensystem, wo der Model dem Anfangsgliede gleich = 1 ist, heißt das natürliche System; die Logarithmen dieses Systems natürliche Logarithmen; alle andere Systeme und Logarithmen derselben, künstliche. Das gewöhnliche Logarithmensystem, wo die Basis 10 ist, gehört zu den künstlichen. Es wurde 1615 von Brigg angegeben.

Eine krumme Linie, deren Ordinaten für gleichförmig wachsende Abscissen in geometrischer Progression zunehmen, heißt eine logarithmische Linie. Sie stellt ein System von Gliedern der geometrischen Progression und deren Logarithmen dar. Ihre Subtangente ist der Model und unveränderlich für alle Stellen derselben logarithmischen Linie. Man kann sich das Obige dadurch versinnlichen. In Fig. 6. ist ungefähr die natürliche logarithmische Linie dargestellt.

§. 16. **Aufgabe.** Jede Zahl durch Model und Logarithmen eines gegebenen Systems auszudrücken. (Zahl, als Funktion des Logarithmen.)

Auflösung. Es sey die Zahl = N und sie sey die m^{te} Potenz der Basis; also $N = b^m$. Die Basis selbst sey die n^{te} Potenz der unendlich wenig von 1 verschiedenen Stammwurzel $w = 1 + i$, nämlich $b = w^n = (1+i)^n$, also

$$N = b^n = (1+i)^{mn},$$

also $$N = 1 + mni + \frac{mn.(mn-1)}{1 \, . \, 2} i^2 \text{ u. s. w.}$$

Da aber n unendlich groß ist, so verschwindet jede endliche Zahl 1; 2; 3 u. s. w. gegen dieselbe, und es ist $mn - 1$ oder $mn - 2$ u. s. w. immer $= mn$ zu setzen;

folglich $$N = 1 + mni + \tfrac{1}{2} m^2 n^2 i^2 + \tfrac{1}{6} m^3 n^3 i^3 \text{ etc.}$$

aber $$i : \frac{1}{n} = 1 : M, \text{ also } M = \frac{1}{ni} \text{ oder } ni = \frac{1}{M}$$

folglich $$N = 1 + \frac{m}{M} + \frac{m^2}{2M^2} + \frac{m^3}{6M^3} \text{ etc.}$$

§. 17. **Zusatz.** Ist die Zahl die Basis des Systems, so ist ihr Logarithmen = 1, also

$$b = 1 + \frac{1}{M} + \frac{1}{2M^2} + \frac{1}{6M^3} \text{ u. s. w.}$$

Die Basis des natürlichen Systems (wo der Modul = 1 ist) nennen wir zur Unterscheidung e. Also

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{120} \cdots$$
$$= 2,7182184 \ldots\ldots$$

§. 18. Zusatz. Eine Zahl N durch ihren natürlichen Logarithmen L ausgedrückt, ist

$$N = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{6} + \frac{L^4}{24} \ldots\ldots$$

§. 19. Aufgabe. Den Logarithmen durch Zahl und Model auszudrücken. (Logarithmen als Funktion der Zahl.)

Auflösung. Um eine Reihe zu erhalten, die sich schnell nähert, setze ich

$$N = P + v = P \cdot \frac{P+v}{P} = P \cdot \frac{2P+2v}{2P} = P\,\frac{2P+v+v}{2P+v-v}$$

$$= P\,\frac{1+\frac{v}{2P+v}}{1-\frac{v}{2P+v}} = P \cdot \frac{1+q}{1-q}$$

Es sey

$$1+q = b^m = (1+i)^{mn}$$

folglich $1+i = (1+q)^{\frac{1}{nm}}$

$$= 1 + \frac{1}{mn}q + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{nm}\left(\frac{1}{nm} - 1\right)q^2 \ldots$$

Aber der Bruch $\frac{1}{nm}$ ist unendlich klein und verschwindet gegen jede endliche Zahl 1; 2; 3; rc. also $\frac{1}{nm} - 1 = -1$ und $\frac{1}{nm} - 2 = -2$ u. s. w.

Folglich

$$1+i = 1 + \frac{q}{nm} - \frac{q^2}{2nm} + \frac{2q^3}{6nm} \ldots$$

$$i = \frac{q}{nm} - \frac{q^2}{2nm} + \frac{q^3}{3nm} + \frac{q^4}{4nm} \ldots$$

also $nmi = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} \ldots$

oder da $i = \frac{1}{nM}$

$$\frac{m}{M} = q - \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{3}q^3 - \tfrac{1}{4}q^4 + \tfrac{1}{5}q^5 \ldots$$

folglich

$$m = \log.(1+q) = M(q - \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{3}q^3 - \tfrac{1}{4}q^4 \ldots)$$

So wie hier der Logarithmen von $1+q$ gefunden ist, so suche man auch den Logarithmen von $1-q$. Dazu ist bloß nöthig in obigen Ausdruck, q negativ zu setzen, da werden die geraden Potenzen positiv, die ungeraden negativ

$$\log.(1-q) = M(-q + \tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{3}q^3 + \tfrac{1}{4}q^4 \ldots)$$

also $\log.\frac{1+q}{1-q} = M(2q + \tfrac{2}{3}q^3 + \tfrac{2}{5}q^5 \ldots)$

$$= 2M(q + \tfrac{1}{3}q^3 + \tfrac{1}{5}q^5 \ldots)$$

und $\log.N = \log.P\frac{1+q}{1-q} = \log.P + \log.\frac{1+q}{1-q}$

$$= \log.P + 2M\left(\frac{v}{2P+v} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{(2P+v)^3} \ldots\right)$$

Diese Reihe nähert sich schnell, wenn $q = \frac{v}{2P+v}$ ein kleiner Bruch ist, dessen Potenzen schnell abnehmen.

§. 20. Exempel. Den Logarithmen von 2 durch den Model auszudrücken.

Hier ist $N = 2$. Man setze $v = 1$, also auch $P = 1$, und $\log.P =$ Null, und $q = \frac{v}{P+v} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

Also $\log.2 = 2M.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^5} \ldots\right)$

Die numerische Rechnung in Decimalbrüchen kann so gesetzt werden

$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333$	$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333$
$\frac{1}{3^3} = 0{,}037\,037\,037$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} = 0{,}012\,345\,679$
$\frac{1}{3^5} = 0{,}004\,115\,226$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} = 0{,}000\,823\,045$
$\frac{1}{3^7} = 0{,}000\,457\,247$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} = 0{,}000\,065\,321$
$\frac{1}{3^9} = 0{,}000\,050\,805$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} = 0{,}000\,005\,645$
$\frac{1}{3^{11}} = 0{,}000\,005\,645$	$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} = 0{,}000\,000\,513$
$\frac{1}{3^{13}} = 0{,}000\,000\,627$	$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} = 0{,}000\,000\,048$
$\frac{1}{3^{15}} = 0{,}000\,000\,069$	$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3^{15}} = 0{,}000\,000\,004$
$\frac{1}{3^{17}} = 0{,}000\,000\,007$	$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3^{17}} = 0{,}000\,000\,000$
$\frac{1}{3^{19}} = 0{,}000\,000\,000$	
	Summe $= 0{,}346\,573\,588$ (2

$$\text{Log. } 2 = M \,.\, 0{,}693\,147\,176 \ldots$$

§. 21. Exempel. Den Logarithmen von 3 zu finden.

Hier ist $N = 3$. Setzt man $v = 1$, $P = 2$, so ist $q = \frac{v}{2P + v} = \frac{1}{5}$. Also

$$\log. 3 = \log. 2 + M \,.\, 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} \cdots \right)$$

Die Rechnung nach obiger Form angestellt, giebt

die Reihe	$= M \,.\, 0{,}405\,465\,104$
dazu log. 2	$= M \,.\, 0{,}693\,147\,180$
log. 3	$= M \,.\, 1{,}098\,612\,284$

§. 22. Zusatz. So findet man die Logarithmen aller Primzahlen 5, 7, 11, 13, u. s. w. Die berechneten Zahlen sind die natürlichen Logarithmen, für M = 1. Um sie für irgend im künstlichen System zu haben, braucht man sie nur mit dem Model dieses Systems zu multipliciren.

Die Logarithmen einer und ebenderselben Zahl in verschiedenen Systemen verhalten sich wie die Model dieser Systeme.

Wie viel leichter, auf diese Art, durch die obige convergirende Reihe, die Logarithmen gefunden werden, als durch die Wurzelausziehungen, wodurch sie ursprünglich mühsam berechnet worden, fällt von selbst in die Augen.

§. 23. Aufgabe. Aus der Basis eines Systems dessen Model zu finden.

Auflösung. Der Logarithmen der Basis ist immer = 1.

Nun ist $\log. \text{art. } b = M. \log. \text{nat. } b.$

folglich $M = \frac{\log. \text{art. } b}{\log. \text{nat. } b}$,

das ist $M = \frac{1}{\log. \text{nat. } b}$.

§. 24. Exempel. Der Model des gewöhnlichen Briggischen Systems ist

$$M = \frac{1}{\log. \text{nat. } 10}$$

und $\log. \text{nat. } 10 = 2,302\,585\,092$

also $M = \frac{1}{2,302\,585\,092}$

$= 0,434\,294\,4819 \ldots$

§. 25. Zusatz. Der Model jedes künstlichen Systems ist zugleich der künstliche Logarithmen der Basis des natürlichen Systems.

Denn $\log.\text{art.}\, e = M \log.\text{nat.}\, e$
$= M$

weil $\log.\text{nat.}\, e = 1$ (wie jeder Logarithmen der Basis $= 1$ ist.)

Vierter Abschnitt.

Größte und kleinste Werthe.

§. 26. Erklärung. Eine veränderliche Größe, die von einer andern veränderlichen Größe abhängig ist, (eine Funktion dieser letztern) kann in manchen Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes werden.

Die Ordinate eines Kreises einer Ellipse oder einer andern krummen Linie hängt von der ihr zugehörigen Abscisse ab; die Ordinate ist eine Funktion der Abscisse. Die Ordinate einer Parabel oder Hyperbel wächst immerfort, wenn die Abscisse wächst, aber die Ordinate eines Kreises, einer Ellipse, wächst bis die Abscisse gleich dem Halbmesser oder der Halbachse ist, nimmt dann aber wieder ab.

Eine Funktion wird ein Größtes (Maximum), wenn sie, indem die andere veränderliche

Größe immerfort zunimmt (oder abnimmt), nur bis zu einem gewissen Werthe wächst und dann wieder abnimmt; sie wird ein Kleinstes (Minimum), wenn sie, indem die andere veränderliche Größe immerfort zunimmt (oder abnimmt), nur bis zu einem gewissen Werthe abnimmt und dann wieder wächst.

Es ist dabei nur von einförmigen Funktionen die Rede, d. h. von solchen, die bei einerlei Werthe der andern veränderlichen Größe auch nur einen Werth haben können.

Die Lehre von Größten und Kleinsten war eine der ersten Anwendungen, die man von der Leibnitz-Newtonschen Erfindung machte.

§. 27. Zusatz. Wenn man auf den Durchmesser des Kreises in unendlich kleinen gleichen Entfernungen von einander, senkrechte Ordinaten zieht, die unendlich kleine Bogen des Umfangs abschneiden, und letztere zu Tangenten verlängert, so schneiden diese Tangenten den verlängerten Durchmesser in immer entfernten Punkten, je weiter die kleinen Bogen gegen die Mitte des Halbkreises hinliegen; bei 90° wird die Tangente unendlich.

Nun ist in den ähnlichen Dreiecken MPT, mqM, wo das Element der krummen Linie Mm als gerade Linie betrachtet werden kann

$$TP : PM = Mq : qm$$
$$= dx : dy.$$

In D, wo die Ordinaten ein Größtes ist, wird der Punkt T unendlich weit weggerückt seyn, indem P in C gerückt ist, also TP wird unendlich groß und so auch Mq unendlich groß gegen qm, das ist dx unendlich groß gegen dy, folglich $\frac{dy}{dx}$ = Null, und so in ähnlichen Fällen.

§. 28. Aufgabe. Zu finden für welchen Werth von x, der Werth von y ein Größtes oder Kleinstes werde.

Auflösung. Man suche für $\frac{dy}{dx}$ einen Ausdruck in den endlichen Größen der Funktion. Diesen setze man = Null. Ergiebt sich daraus ein bestimmter Werth von x, so ist dies derjenige, für welchen y entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird; (welches von beiden ist jedoch dadurch noch nicht entschieden). Ergiebt sich kein bestimmter Werth von x, so giebt es keinen Größten oder Kleinsten für y.

An einigen Beispielen wird es sich am besten erläutern lassen.

§. 29. Aufgabe. Zu finden, für welche Absciſſe die Ordinate einer Parabel ein Größtes wird.

Auflösung. In der Parabel ist $y^2 = 2px$, wenn p den Halbparameter bedeutet.

Also $$2y\,dy = 2p\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

Setzt man nun $\frac{p^2}{\sqrt{2px}} =$ Null

oder $\frac{p^2}{2px}$ das ist $\frac{p}{2x} =$ Null,

so giebt das keinen bestimmten Werth von x, sondern $x = \infty$. Es giebt also keine größte Ordinate.

§. 30. Aufgabe. Zu finden, wann die Ordinate der Ellipse ein Größtes wird.

Auflösung. Für die Ellipse ist $y^2 = \frac{p}{a}x$ $(2a - x)$ oder $y^2 = \frac{p}{a} \cdot 2ax - x^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$,

also $2ydy = 2pdx - 2\frac{p}{a}xdx$

$$dy = \frac{p}{y}dx - \frac{p}{ay}xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} - \frac{p}{ay}x.$$

Setzt man dieses = Null

folglich $\frac{p}{y} - \frac{px}{ay} = 0$

das ist $\frac{p}{y} = \frac{p}{ay}x$

oder $1 = \frac{x}{a}$

so ist $a = x.$

Die Ordinate wird ein Größtes, wenn die Abscisse der großen Halbachse gleich ist.

§. 31. Aufgabe. Ein Rechteck soll bei gegebenem Umfange die größtmögliche Fläche haben, man sucht die Seitenlinien.

Auflösung. Der gegebene Umfang sey $= p$, die eine Seite $= x$; die andere $= y$.

Also $p = 2x + 2y$

$y = \frac{1}{2}p - x.$

Die Fläche sey $= F$,

also $F = xy = x(\frac{1}{2}p - x)$

$= \frac{1}{2}px - x^2$

$dF = \frac{1}{2}pdx - 2xdx$

$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}p - 2x.$

Dieses Null gesetzt

$\frac{1}{2}p - 2x = 0$

$\frac{1}{2}p = 2x$

folglich $x = \frac{1}{4}p$

und auch $y = \frac{1}{2}p - x = \frac{1}{4}p$,

also das Rechteck muß ein Quadrat seyn.

So kann man auch umgekehrt suchen, welches Rechteck bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang habe.

§. 32. Aufgabe. Ein rechtwinkliches Parallelepipedum soll bei gegebener Oberfläche den größtmöglichen Körperinhalt haben; man sucht die Verhältnisse der Seitenlinien.

Auflösung. 1) Es sey Oberfläche $= F$, Körperinhalt $= K$, Länge $= x$, Breite $= y$, Höhe $= z$. Also $K = xyz$ und $F = 2(xy + xz + yz)$ oder $\frac{1}{2}F = xy + xz + yz$.

Man suche zuerst die Verhältniß von x und y. Zu dem Ende nehme man die Höhe z vorerst als

unveränderlich an, und setze $\frac{1}{2}F = \frac{K}{z} + \frac{K}{y} + yz$.

Differentiirt; dF und dz Null gesetzt,

giebt $$o = \frac{dK}{z} + \frac{dK}{y} - \frac{Kdy}{y^2} + zdy.$$

Aber auch $dK = o$ weil $K = \text{Maximum}$.

Also $$\frac{Kdy}{y^2} = zdy$$
$$K = y^2z$$
aber $$K = xyz$$
folglich $$x = y.$$
Die Grundfläche muß ein Quadrat seyn.

2) Man suche die Verhältniß von x und z. Da $x = y$ seyn muß, so ist
$$\frac{1}{2}F = x^2 + 2xz$$
$$= x^2 + \frac{2K}{x}$$

Differentiirt und dF Null gesetzt,

giebt $$o = 2xdx + \frac{x2dK - 2Kdx}{x^2}$$
und für $K = \text{Maximum}$ auch dK Null
$$o = 2xdx - \frac{2Kdx}{x^2}$$
$$\frac{2Kdx}{x^2} = 2xdx$$
$$K = x^3.$$
Aber $$K = xyz = x^2z,$$
also $$x^2z = x^3$$
$$z = x.$$
Das Parallelepipedum muß ein Cubus seyn.
Die Oberfläche F wird $= 6x^2$
und die Seite x $= \sqrt{\frac{1}{6}F}$.

So kann man auch umgekehrt suchen, welches Parallelepidum bei gegebenem Körperinhalt die kleinste Oberfläche habe, wo sich dann ebenfalls findet, daß es ein Würfel sey.

§. 33. Aufgabe. Ein oben offner Kasten, (hohles, rechtwinklichtes Parallelepipedum ohne Decke) soll, bei gegebener Oberfläche, den größtmöglichen Körperinhalt haben; man sucht die Verhältnisse der Seitenlinien.

Auflösung. 1) Hier ist $F = xy + 2xz + 2yz = \frac{K}{z} + \frac{2K}{y} + 2yz.$

Differentiirt und gleich dF; dK; dz Null gesetzt, weil F bestimmt gegeben, K = Maximum und z zuerst als bestimmt angenommen wird

$$o = \frac{-2Kdy}{y^2} + 2zdy$$

$$\frac{2Kdy}{y^2} = 2zdy$$

$$K = y^2z.$$

Aber auch $K = xyz,$

folglich $x = y.$

Die Grundfläche muß auch hier ein Quadrat seyn.

2) Man suche ferner die Verhältniß von x und z.

Da $x = z,$

so ist $F = x^2 + 4xz$

$$= x^2 + \frac{4K}{x}.$$

Differentiirt und dF; dK Null gesetzt

$$o = 2xdx - \frac{4Kdx}{x^2}$$

$$\frac{4Kdx}{x^2} = 2xdx$$

$$K = \tfrac{1}{2}x^3$$

aber auch $K = xyz = x^2z$

folglich $\tfrac{1}{2}x^2 = x^2z$

$$z = \tfrac{1}{2}x.$$

Die Höhe muß halb so groß als die Seite der Grundfläche seyn.

Die Oberfläche F wird $= 3x^2$ und die Seite x $= \sqrt{\tfrac{1}{3}F}$; die Höhe $z = \sqrt{\tfrac{1}{12}F}$.

Exempel. Zu einem Wasserbehälter sind geliefert worden, 27 Bohlen, jede 1 Fuß breit und 16 Fuß lang. Der Behälter soll die größtmögliche Wassermenge fassen.

Hier ist $F = 27 \cdot 16 = 432$ Quadratfuß,
also $x = \sqrt{\tfrac{1}{3}F} = \sqrt{144} = 12$ Fuß,
und $z = \sqrt{\tfrac{1}{12}F} = \sqrt{36} = 6$ Fuß.

Das Bassin muß 12 Fuß lang und breit, und 6 Fuß hoch seyn. Es enthält dann $144 \cdot 6 = 864$ Cubikfuß Wasser.

Daß es bei jeder andern Gestalt weniger Wasser fasse, kann man durch eine beliebige Probe bestätigt finden.

Umgekehrt läßt sich auf ähnliche Art finden, welche Seitenverhältnisse erfordert werden, wenn

der Behälter bei gegebenem Inhalt die kleinstmögliche Fläche haben soll. Es wird dieselbe seyn.

§. 34. Aufgabe. Ein Cylinder soll bei gegebener Oberfläche den größtmöglichen Körperinhalt haben; man sucht die Verhältniß vom Durchmesser und Höhe.

Auflösung. Wenn der Durchmesser $= x$, so ist die Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$. Wenn die Höhe $= z$, so ist die krumme Wand $= \pi xz$.

Also $\quad F = \frac{1}{2}\pi x^2 + \pi xz$

und $\quad K = \frac{1}{4}\pi x^2 z$, also die krumme Wand

$$\pi xz = \frac{K}{\frac{1}{4}x} = \frac{4K}{x}.$$

Folglich $\quad F = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{4K}{x}.$

Differentiirt und dF Null gesetzt, weil F bestimmt ist, auch zugleich dK Null gesetzt, weil K = Maximum.

$$o = \frac{1}{2}\pi 2x dx - \frac{4K dx}{x^2}$$

$$\frac{4K dx}{x^2} = \pi x dx$$

$$K = \frac{1}{4}\pi x^3.$$

Aber auch $K = \frac{1}{4}\pi x^2 z$,

folglich $\quad z = x.$

Der Cylinder muß gleichseitig, eben so hoch als dick seyn.

Es wird $\quad F = \frac{3}{2}\pi x^2$

und $\quad x = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{F}{\pi}}.$

Umgekehrt kann auf ähnliche Art gesucht werden, wie der Cylinder seyn müsse, um bei gegebenem Inhalt die kleinste Fläche zu haben.

Bei der folgenden Aufgabe wollen wir die Frage, so umgekehrt, stellen.

§. 35. Aufgabe. Ein oben offenes cylindrisches Gefäß soll bei gegebenem Körperinhalt die kleinstmögliche Fläche haben; man sucht die Verhältniß vom Durchmesser und Höhe.

Auflösung. Es ist $F = \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{4K}{x}$.

Differentiirt und dF; dK Null gesetzt, jenes weil F = Minimum; dieses weil K bestimmt ist

$$o = \tfrac{1}{4}\pi 2xdx - \frac{4Kdx}{x^2}$$

$$\frac{4Kdx}{x^2} = \tfrac{1}{2}\pi xdx$$

$$K = \tfrac{1}{8}\pi x^3$$

aber $K = \tfrac{1}{4}\pi x^2 z$

also $\tfrac{1}{4}\pi x^2 z = \tfrac{1}{8}\pi x^3$

$$\tfrac{1}{4}z = \tfrac{1}{8}x$$

$$z = \tfrac{1}{2}x.$$

Die Höhe muß dem Halbmesser gleich seyn.

Es wird $x = \sqrt[3]{\frac{8K}{\pi}}$.

Exempel. Ein silbernes cylindrisches Gefäß soll 1 Maaß Wasser enthalten; wie müssen Durchmesser und Höhe genommen werden, damit es so wenig wie möglich an Silber koste?

Ein Maaß enthält 62 Cubikzoll rhein. (nach hiesigem Gemäße.)

Durchmesser $x = \sqrt[3]{8 \cdot 62 \cdot 0,3183098}$
$= 5,4$ Zoll,
Höhe $z = 2,7$ Zoll.

Bei unsern gewöhnlichen blechernen Maaßgefäßen ist diese Form nicht gewählt; auch wäre bei so wohlfeilem Material die Ersparung zu unbedeutend, und die Form nicht dem Zwecke angemessen, weil aus einem weiten niedrigen Gefäß leichter verschüttet wird.

§. 36. Aufgabe. Ein Cylinder soll bei gegebener Visirlinie den größtmöglichen Inhalt haben; man sucht die Verhältniß vom Durchmesser und Höhe.

Auflösung. Visirlinie nenne ich die Diagonale des Rechtecks, welches der auf die Grundfläche senkrechte Durchschnitt durch die Achse giebt.

Es sey Durchmesser $= x$; Visirlinie $= a$; Höhe $= z$, Inhalt $= K$.

Es ist $K = \frac{1}{4}\pi x^2 z$

Aber $z = \sqrt{a^2 - x^2}$,

also $K = \frac{1}{4}\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$

$$K^2 = \frac{1}{16}\pi^2 x^4 (a^2 - x^2)$$
$$= \frac{1}{16}\pi^2 a^2 x^4 - \frac{1}{16}\pi^2 x^6.$$

Differentiirt; dK Null gesetzt

$$0 = \frac{1}{16}\pi^2 a^2 4x^3 dx - \frac{1}{16}\pi^2 6x^5 dx$$
$$\frac{1}{16}\pi^2 6x^5 dx = \frac{1}{16}\pi^2 a^2 4x^3 dx$$
$$x^2 = \frac{2}{3}a^2$$

also $z^2 = \frac{1}{3}a^2$.

Es

Es verhält sich $z : x = 1 : \sqrt{2}$
$= 1 : 1,4142135 \ldots\ldots$

Höhe : Durchmesser = Seite eines Quadrats : Diagonale desselben.

Der Winkel, den die Diagonale mit der Höhe macht, ist $54^\circ 44' 8''$. Er kömmt häufig vor.

Die Aufgabe ist interessant, in Rücksicht des Fußvisirens.

Fünfter Abschnitt.

Summirung der Potenzen.

§. 37. **Aufgabe.** Eine Reihe von gleich hohen Potenzen, der natürlichen Zahlenfolge, zu summiren.

Auflösung. Die Reihe der Potenzen von 1 bis y bezeichne ich durch $\int y^m$. Die Reihe der Potenzen von 2 bis $y+1$ durch $\int (y+1)^m$

$$\int y^m = 1^m + 2^m + 3^m \ldots\ldots + y^m$$

$$\int (y+1)^m = \quad 2^m + 3^m + 4^m \ldots + y^m + (y+1)^m$$

Die untere Reihe ist um $(y+1)^m - 1$ größer als die obere, also

$$\int (y+1)^m = \int y^m + (y+1)^m - 1.$$

Aber eben diese untere Reihe besteht aus den Gliedern

$$1^{\text{tes}} = (1+1)^m = 1^m + m\,1^{m-1} + \frac{m\,m-1}{1\,.\,2} 1^{m-2} \ldots$$
$$2^{\text{tes}} = (2+1)^m = 2^m + m.2^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} 2^{m-2} \ldots$$
$$3^{\text{tes}} = (3+1)^m = 3^m + m\,3^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} 3^{m-2} \ldots$$
$$4^{\text{tes}} = (4+1)^m = 4^m + m.4^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} 4^{m-2} \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\text{letzt.} = (y+1)^m = y^m + m\,y^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} y^{m-2} \ldots$$

$$\text{Folgl.}\ \int(y+1)^m = \int y^m + m\int y^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} \int y^{m-2} \ldots$$

Beide Ausdrücke für $\int(y+1)^m$ in Gleichung gesetzt, und das in beiden befindliche $\int y^m$ weggelassen, ist folglich

$$m\int y^{m-1} + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2} \int y^{m-2} \ldots = (y+1)^m - 1$$

$$m\int y^{m-1} = (y+1)^m - 1 - \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2} \int y^{m-2}$$
$$- \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3} \int y^{m-3} \ldots$$

$$\int y^{m-1} = \frac{(y+1)^m - 1}{m} - \frac{m-1}{2} \int y^{m-2}$$
$$- \frac{m-1\,.\,m-2}{2\,.\,3} \int y^{m-3} \ldots$$

oder $m - 1 = n$ gesetzt

$$\int y^n = \frac{(y+1)^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{n}{2} \int y^{n-1} - \frac{n.(n-1)}{2\,.\,3} \int y^{n-2} \ldots$$

Das letzte der subtractiven Glieder wird $\int y^0$ enthalten. Es ist aber $y^0 = 1$, also $\int y^0$ die Reihe von y Einssen $= y$.

$\Sigma(1+2^m+3^m+\ldots n^m) = \frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{2}\Sigma 1+$

Die hier in den subtractiven Gliedern vorkommenden $\int y^{n-1}$; $\int y^{n-2}$ u. s. w. zu entwickeln, würde keinen Nutzen haben und den Ausdruck nur verworrener machen. Ein Paar Beispiele von der Anwendung desselben, werden nützlicher seyn.

Exempel. Die Summe der ersten Potenzen, d. h. der natürlichen Zahlenfolge selbst, von 1 bis y zu finden, (was man nach den Regeln der gemeinen arithmetischen Progression schon weiß). Nach dieser Methode auf folgende Art.

Es ist $n = 1$

$$\int y' = \frac{(y+1)^2 - 1}{2} - \tfrac{1}{2}\int y^0$$
$$= \frac{y^2 + 2y + 1 - 1}{2} - \tfrac{1}{2}y$$
$$= \frac{y^2 + y}{2} = \frac{(y+1) \cdot y}{1 \cdot 2} = \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}y.$$

$\frac{y}{2}(y+1)$ $\frac{n}{2}(n+1)$

Die Summe der zweiten Potenzen von 1 bis y zu finden.

Es ist $n = 2$

$$\int y^2 = \frac{(y+1)^3 - 1}{3} - \tfrac{2}{2}\int y' - \tfrac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3}\int y^0$$
$$= \frac{y^3 + 3y^2 + 3y}{3} - \frac{y^2 + y}{2} - \frac{y}{3}$$
$$= \frac{2y^3 + 6y^2 + 6y - 3y^2 - 3y - 2y}{6}$$
$$= \frac{2y^3 + 3y^2 + y}{6}$$ $= \frac{y}{6}(2y^2+3y+1) = \frac{y}{6}(2y+1)(y+1)$

Die Summe der dritten Potenzen von 1 bis y zu finden.

Es ist $n = 3$

$$\int y^3 = \frac{(y+1)^4 - 1}{4} - \tfrac{3}{2}\int y^2 - \tfrac{3\cdot 2}{2\cdot 3}\int y' - \tfrac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}\int y^0$$

$$= \frac{y^4+4y^3+6y^2+4y}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2y^3+3y^2+y}{6} - \frac{3\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot\frac{y^2+y}{2} - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}\,y$$

$$\begin{aligned} = \tfrac{1}{4}y^4 + y^3 &+ \tfrac{3}{2}y^2 + y \\ - \tfrac{1}{2}y^3 &- \tfrac{3}{4}y^2 - \tfrac{1}{4}y \\ &- \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y \\ &\phantom{- \tfrac{1}{2}y^2} - \tfrac{1}{4}y \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{4}y^2 \;*$$

$= \frac{y^2}{4}(y^2+2y+1) = \frac{y^2}{4}(y+1)^2$

Die Summen der vierten und folgenden Potenzen, von 1 bis y werden auf ähnliche Art gefunden; nämlich

$$\int y^4 = \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{2}y^4 + \tfrac{1}{3}y^3 \;*\; - \tfrac{1}{30}y$$
$$\int y^5 = \tfrac{1}{6}y^6 + \tfrac{1}{2}y^5 + \tfrac{5}{12}y^4 \;*\; - \tfrac{1}{12}y^2 \;*$$
$$\int y^6 = \tfrac{1}{7}y^7 + \tfrac{1}{2}y^6 + \tfrac{1}{2}y^5 \;*\; - \tfrac{1}{6}y^3 \;*\; + \tfrac{1}{42}y$$

u. s. w.

Sechster Abschnitt.

Methode des Integrirens.

§. 38. Aufgabe. Aus den Differentialen veränderlicher Größen dieß letztere selbst zu finden.

Auflösung. 1) Man suche die Differentiale nach irgend einer von den obigen bekannten Formen §. 3. bis 8. zu bringen, so ergeben sich daraus die Integrale. Das Zeichen des Integrals sey $\int$, so ist

$$\int (dx + dy) = x + y \text{ (§. 3.)}$$
$$\int (dx - dy) = x - y \text{ (§. 4.)}$$
$$\int (ydx + xdy) = xy \text{ (§. 5.)}$$
$$\int \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{x}{y} \text{ (§. 6.)}$$

Daraus

$$\int \frac{-ady}{y^2} = \frac{a}{y}$$
$$\int \frac{ady}{y^2} = \frac{-a}{y}$$
$$\int mx^{m-1}dx = x^m \text{ (§. 7.)}$$

2) Man differentiire vorläufig verschiedene andere Ausdrücke, um mehrere Formen zu erhalten, z. B.

$$d\sqrt{a^2-x^2} = d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(a^2-x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} . d(-x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} . (-2xdx)$$
$$= -(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, xdx$$
$$= \frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2}}.$$

Das giebt also die Form

$$\int \frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \sqrt{a^2-x^2}.$$

So differentiire man z. B. ferner $\sqrt{2ax-x^2}$

$$d\sqrt{2ax-x^2} = d(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}.(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(2ax-x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}.(2adx-2xdx)$$
$$= (2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}(adx-xdx)$$
$$= \frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$
$$= \frac{(a-x)dx}{\sqrt{x(2a-x)}}.$$

Das giebt die Form

$$\int\frac{(a-x)dx}{\sqrt{x(2a-x)}} = \sqrt{x(2a-x)}.$$

3) Besonders verdient noch folgende Form bemerkt zu werden.

Aus §. 14. ist

Differential einer Zahl	: Differential ihres Logar.	= Zahl	: Model
dy	: dx	= y	: M,

also $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{M}$,

oder $M\frac{dy}{y} = dx$,

das ist $M\frac{dy}{y} = d\log.y$,

also $M\int\frac{dy}{y} = \log.y$,

oder für natürliche Logarithmen $M = 1$ gesetzt (§. 22.)

$$\int\frac{dy}{y} = \log.nat.y.$$

§. 39. **Zusatz.** Durch das Integriren findet man begreiflich nur denjenigen Theil einer

Funktion, aus dessen Veränderung das Differential entsteht, also nur den veränderlichen Theil. Die Funktion kann aber auch einen unveränderlichen Theil, eine Constante enthalten, der dann noch hinzugesetzt werden muß. Wie groß er sey, muß aus den Umständen bestimmt werden, welches aus Beispielen nachher erhellen wird.

§. 40. Zusatz. Wenn man ein Differential nicht auf eine von den Formen bringen kann, deren Integrale man kennt (§. 38.), so muß man eine Reihe bilden, und deren Glieder einzeln differentiiren, wie ebenfalls aus Beispielen erhellen wird.

Siebenter Abschnitt.

Trigonometrische Funktionen.

§. 41. Aufgabe. Formeln für trigonometrische Differentiale zu finden.

Auflösung. Es ist Fig. 1. wegen Ähnlichkeit der Dreiecke CM : CP = Mm : mq,
das ist, wenn wir den Bogen AM in Theilen des zu 1 angenommenen Halbmessers = x setzen,

$$1 : \cos. x = dx : d \sin. x$$

Ferner CM : MP = Mm : Mq,

das ist $1 : \sin. x = dx : -d \cos. x.$

Hieraus ergeben sich folgende Formeln.

1) Für Differentiale des Bogens und Sinus

$$dx = \frac{1}{\cos.\, x}\, d\sin.\, x$$

$$d\sin.\, x = \cos.\, x : dx.$$

2) Für Differentiale des Bogens und Cosinus

$$dx = -\frac{1}{\sin.\, x}\, d\cos.\, x$$

$$d\cos.\, x = -\sin.\, x : dx.$$

3) Für Differentiale des Bogens und der Tangente.

Es ist $\tan g.\, x = \frac{\sin.\, x}{\cos.\, x}$,

also $d\,\tan g.\, x = \frac{\cos.\, x\, d\sin.\, x - \sin.\, x\, d\cos.\, x}{\cos.\, x^2}$.

Aus 1) ist hier $\cos.\, x\, d\sin.\, x = \cos.\, x^2\, dx$

und aus 2) $-\sin.\, x\, d\cos.\, x = +\sin.\, x^2\, dx$,

also der Zähler $= (\sin.\, x^2\ \cos.\, x^2)\, dx$

$= 1\, dx$,

folglich $dx = \cos.\, x^2\, d\,\tan g.\, x$

$$d\,\tan g.\, x = \frac{1}{\cos.\, x^2}\, dx.$$

4) Für Differentiale des Bogens und der Cotangente.

Es ist $\cot.\, x = \frac{\cos.\, x}{\sin.\, x}$,

also $d\cot.\, x = \frac{\sin.\, x\, d\cos.\, x - \cos.\, x\, d\sin.\, x}{\sin.\, x^2}$.

Aus 2) ist $\sin.\, x \,.\, d\cos.\, x = -\sin.\, x^2\, dx$

Aus 1) $-\cos.\, x\, d\sin.\, x = -\cos.\, x^2\, dx$

also der Zähler $= -(\sin.\, x^2 + \cos.\, x^2) dx$

$= -1\, dx$,

folglich $dx = -\sin. x^2 \, d\cot. x$

$$d\cot. x = -\frac{1}{\sin. x^2} dx.$$

Man kann diese Formeln verschiedentlich abändern, zum Beispiel

$$dx = \frac{1}{1+\text{tang}. x^2} d\,\text{tang}. x,$$

das ist $= \frac{1}{\text{Sec}. x^2} d\,\text{tang}. x.$

Daß dies mit obigen $\cos. x^2 \, d\text{tang}. x$ einerlei sey, ist klar, da sich verhält

$$\sec. x : 1 = 1 : \cos. x.$$

Man kann diese Formeln auch aus Fig. 3. herleiten.

§. 42. Aufgabe. Aus dem Sinus den zugehörigen Bogen zu finden.

Auflösung. Es ist

$$dx = \frac{1}{\cos. x} d\sin. x$$

$$= \frac{1}{(1-\sin. x^2)^{\frac{1}{2}}} d\sin. x$$

$$= (1-\sin. x^2)^{-\frac{1}{2}} d\sin. x.$$

Das ist, wenn man die Potenz nach §. 11. in eine Reihe verwandelt

$$dx = \left.\begin{matrix} 1 \\ + \frac{1}{2} \sin. x^2 \\ + \frac{3}{8} \sin. x^4 \\ + \frac{5}{16} \sin. x^6 \\ + \frac{35}{128} \sin. x^8 \\ \text{u. s. w.} \end{matrix}\right\} d\sin. x$$

oder Integrirens wegen

$$dx = \left. \begin{array}{l} \quad 1 \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\, 3\sin.x^2 \\ + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5\sin.x^4 \\ + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{7} \cdot 7\sin.x^6 \\ + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{9} \cdot 9\sin.x^8 \\ \quad \text{u. s. w.} \end{array} \right\} d\sin.x$$

Integrirt

$$x = \sin.x + \tfrac{1}{6}\sin.x^3 + \tfrac{3}{40}\sin.x^5 + \tfrac{5}{112}\sin.x^3 + \tfrac{35}{1152}\sin x^9 \ldots$$

Die Constante ist Null, weil für $x = 0$, auch $\sin.x = 0$ ist.

§. 43. **Aufgabe.** Aus dem Bogen den Sinus zu finden.

Auflösung. Es ist

$$d\sin.x = \cos.x \,.\, dx.$$

Quadrirt

$$(d\sin.x)^2 = \cos.x^2\, dx^2.$$
$$= (1 - \sin.x^2)\, dx^2.$$

Differentiirt und das Differential des Bogens nämlich dx unveränderlich gesetzt,

$$2d\sin.x \,.\, dd\sin.x = -2\sin.x\, d\sin.x\, dx^2$$
$$dd\sin.x = -\sin.x \,.\, dx^2.$$

Ein zweiter Ausdruck für $dd\sin.x$ findet sich, wenn man für $\sin.x$ eine Reihe annimmt, und die Methode der unbestimmten Koeffizienten dabei anwendet (wie §. 10.); nämlich man setze

$$\sin.x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 \ldots\ldots$$

Differentiirt

$$d\sin.x = dx + 3Ax^2dx + 5Bx^4dx + 7Cx^6dx + 9Dx^8\, dx \ldots$$

Differentiirt (dx unveränderlich)

$$dd\,\sin.x = 2\cdot3\cdot Axdx^2 + 4\cdot5\cdot Bx^3\,dx^2$$
$$+ 6\cdot7\cdot Cx^5\,dx^2 + 8\cdot9\cdot Dx^7\,dx^2 \ldots$$

Beide Ausdrücke für $dd\,\sin.x$ in Gleichung gestellt und mit dx^2 dividirt

$$\sin.x = -2\cdot3\cdot Ax - 4\cdot5\cdot Bx^3$$
$$-6\cdot7\cdot Cx^5 - 8\cdot9\cdot Dx^7 \ldots$$

Aber es war angenommen

$$\sin.x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 \ldots\ldots$$

Also die zu gleich hohen Potenzen von x gehörigen Koeffizienten in diesen beiden Reihen gleich gesetzt

$$-2\cdot3\cdot A = 1$$
$$A = -\frac{1}{2\cdot3} = -\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$$
$$-4\cdot5\cdot B = A$$
$$B = -\frac{1}{4\cdot5}A = +\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$
$$-6\cdot7\cdot C = B$$
$$C = -\frac{1}{6\cdot7}B = -\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$$
$$-8\cdot9\cdot D = C$$
$$D = -\frac{1}{8\cdot9}C = +\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$$

u. s. w.

Folglich $\sin.x = x - \frac{1}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \frac{1}{1\cdot\ldots\cdot5}x^5$
$$-\frac{1}{1\cdot\ldots\cdot7}x^7 + \frac{1}{1\cdot\ldots\cdot9}x^9 \ldots$$

§. 44. Aufgabe. Aus dem Cosinus den Bogen zu finden.

Auflösung. Man berechne den Sinus, nämlich $\sin.x = \sqrt{1-\cos.x^2}$ und verfahre wie §. 42.

§. 45. Aufgabe. Aus dem Bogen den Cosinus zu finden.

Auflösung. Es ist $d\cos. x = -\sin. x dx$,
also $d\cos. x = -x dx + \frac{1}{1\cdot2\cdot3}x^3 x dx - \frac{1}{1\cdots5}x^5 dx + \frac{1}{1\cdots7}x^7 dx - \frac{1}{1\cdots9}x^9 dx + \frac{1}{1\cdots11}x^{11} dx$ u. s. w.

Integrirens wegen

$$d\cos. x = -\tfrac{1}{2}2x dx + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}4x^3 dx - \frac{1}{1\cdots6}6x^5 dx + \frac{1}{1\cdots8}8x^7 dx - \frac{1}{1\cdots10}10x^9 dx + \frac{1}{1\cdots12}12x^{11} dx$$ u. s. w.

Integrirt

$$\cos. x = -\frac{1}{1\cdot2}x^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4 - \frac{1}{1\cdots6}x^6 + \frac{1}{1\cdots8}x^8 - \frac{1}{1\cdots10}x^{10} + \frac{1}{1\cdots12}x^{12}$$ u. s. w. . . . . . . + Const.

Die Reihe wird Null, wenn $x =$ Null,
dann ist $\cos. x = 0 + \text{Const.}$,
aber $\cos. x$ wird $= 1 = \sin. \text{tot.}$,
wenn $x = 0$ ist,
also $\text{Const.} = 1 = \sin. \text{tot.}$
also vollständiges Integrats

$$\cos. x = 1 - \frac{1}{1\cdot2}x^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4 - \frac{1}{1\cdots6}x^6 + \frac{1}{1\cdots8}x^8 - \frac{1}{1\cdots10}x^{10} + \frac{1}{1\cdots12}x^{12}$$ u. s. w.

§. 46. Aufgabe. Aus der Tangente den Bogen zu finden.

Auflösung. Es ist

$$dx = \frac{1}{1 + \text{tang.}\, x^2}\, d\,\text{tang.}\, x$$

oder den Bruch in eine Reihe verwandelt

$$dx = (1 - \text{tang.}\,x^2 + \text{tang.}\,x^4 - \text{tang.}\,x^6 + \text{tang.}\,x^8 \ldots)\,d\,\text{tang.}\,x$$

Integrirens wegen

$$dx = 1 \,.\, d\,\text{tang.}\,x - \tfrac{1}{3} \,.\, 3\,\text{tang.}\,x^2\,d\,\text{tang.}\,x + \tfrac{1}{5}\,5\,\text{tang.}\,x^4\,d\,\text{tang.}\,x - \tfrac{1}{7}\,7\,\text{tang.}\,x^6\,d\,\text{tang.}\,x$$

u. s. w.

Integrirt

$$x = \text{tang.}\,x - \tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,\text{tang.}\,x^5 - \tfrac{1}{7}\,\text{tang.}\,x^7 \ldots$$

§. 47. **Aufgabe.** Aus dem Bogen die Tangente zu finden.

Auflösung. Es ist

$$d\,\text{tang.}\,x = (1 + \text{tang.}\,x^2)\,dx.$$

Man setze mit unbestimmten Koeffizienten

$$\text{tang.}\,x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 \text{ u. s. w.}$$

Differentiirt

$$d\,\text{tang.}\,x = dx + 3Ax^2\,dx + 5Bx^4\,dx \ldots.$$

Beide Ausdrücke für $d\,\text{tang.}\,x$ in Gleichung gestellt und mit dx dividirt

$$1 + \text{tang.}\,x^2 = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 \ldots$$

$$\text{tang.}\,x^2 = 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 \ldots$$

Ein zweiter Ausdruck für $\text{tang.}\,x^2$ findet sich, wenn man die erst angenommene Reihe

quadrirt also $x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^6 + Dx^7 \ldots$

multipliz. mit $x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^6 + Dx^7 \ldots$

	$x^2 + A$	$x^4 + B$	$x^6 + C$	$x^8 + D$	$x^{10} \ldots$
	$+ A$	$+ A^2$	$+ AB$	$+ AC$	
		$+ B$	$+ AB$	$+ B^2$	
			$+ C$	$+ AC$	
				$+ D$	
$\text{tang.}\,x^2$	$= x^2 + 2A$	$x^4 + A^2$	$x^6 + 2AB$	$x^8 + B^2$	$x^{10} \ldots$
		$+ 2B$	$+ 2C$	$+ 2AC$	
				$+ 2D$	

Die zu gleich hohen Potenzen von x gehörigen Koeffizienten in beiden für tang. x^2 gefundenen Reihen gleich gesetzt

$$3A = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{3}$$

$$5B = 2A$$

$$B = \frac{2A}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{2}{15}$$

$$7C = A^2 + 2B$$

$$C = \frac{A2+2B}{7} \ldots\ldots\ldots = \frac{17}{315}$$

$$9D = 2AB + 2C$$

$$D = \frac{2AB+2C}{9} \ldots\ldots\ldots = \frac{62}{2835}$$

$$11E = B^2 + 2AC + 2D$$

$$E = \frac{B^2+2AC+2D}{11} \ldots\ldots = \frac{1382}{155925}$$

u. s. w.

Diese Werthe in die angenommene Reihe gesetzt

$$\text{tang.}\, x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \tfrac{1382}{155925}x^{11} \ldots$$

§. 48. Aufgabe. Aus der Cotangente den Bogen zu finden.

Auflösung. Man berechne die Tangente, nämlich tang. $x = \frac{1}{\text{cot.}\, x}$ und verfahre dann wie §. 46.

§. 49. Aufgabe. Aus dem Bogen die Cotangente zu finden.

Auflösung. Man berechne die Tangente durch die Reihe §. 47. und daraus die Cotangente, nämlich $\cot. x = \frac{1}{\tang. x}$.

Die Reihen, die es unmittelbar geben, übergehe ich der Kürze wegen.

Achter Abschnitt.

Rectification des Kreises.

§. 50. Aufgabe. Den Kreisumfang zu rectificiren.

Auflösung. Man kann verschiedene Methoden wählen.

Erste Methode aus §. 46 durch Tangenten. Es war

$x = \tang. x - \frac{1}{3}\tang. x^3 + \frac{1}{5}\tang. x^5 - \frac{1}{7}\tang. x^7 ..$

Setzt man hier $\tang. x = 1$, das heißt: nimmt man einen Bogen von 45°, der = dem halben Quadranten = $\frac{1}{4}\pi$ (für Halbmesser = 1) ist, so erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \ldots$$

$$= 1,0000000 - 0,3333333$$
$$+ 0,2000000 - 0,1428571$$
$$+ 0,1111111 - 0,0909090$$
$$+ 0,0769230 - 0,0666666$$
$$+ 0,0588235 - 0,0526315$$

u. s. w. u. s. w.

Die obigen zehn Glieder geben

$$1,4468576 - 0,6863975$$
$$= 0,7604601 \ldots\ldots$$

aber $\frac{1}{4}\pi = 0,7853951 \ldots\ldots$

Daraus erhellet, daß für eine Tangente = 1 die Reihe sich viel zu langsam nähert, weil die Koeffizienten zu wenig abnehmen.

Wir haben die Reihe bloß deshalb zuerst genommen, weil sie so einfach ist.

Zur Rectification aber muß man eine Tangente nehmen, die kleiner als der Halbmesser, also ein eigentlicher Bruch ist, damit die Glieder der Reihe, die dann nach Potenzen eines eigentlichen Bruchs fortgehen, schnell abnehmen.

Man nehme also die Tangente von 30°. Es ist aber $\text{tang.}\,30 = \frac{\sin.\,30°}{\cos.\,30°}$

und $\sin.\,30° = \frac{1}{2}$

$$\cos.\,30° = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

also

$$\text{tang.}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$(\text{tang.}\,30°)^3 = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3}$$
$$(\text{tang.}\,30°)^5 = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^2}$$
$$(\text{tang.}\,30°)^7 = \frac{1}{\sqrt{3^7}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^3}$$
$$(\text{tang.}\,30°)^9 = \frac{1}{\sqrt{3^9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^4}$$

Diese Werthe in die Reihe gesetzt

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} \ldots\right)$$
$$6x = \pi = 2.\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} \ldots\right)$$

Es

Es sind also

	die positiven Glieder:	d. negativ. Glied.:
$2\sqrt{3}\cdot 1$	$=$ 3,464 101 615 138	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3.3}$	$=$	0,384 900 179 460
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{5.3^{2}}$	$=$ 0,076 980 035 892	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{7.3^{3}}$	$=$	0,018 328 579 974
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{9.3^{4}}$	$=$ 0,004 751 854 072	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{11.3^{5}}$	$=$	0,001 295 960 200
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{13.3^{6}}$	$=$ 0,000 365 527 236	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{15.3^{7}}$	$=$	0,000 105 596 757
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{17.3^{8}}$	$=$ 0,000 031 057 870	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{19.3^{9}}$	$=$	0,000 009 262 873
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{21.3^{10}}$	$=$ 0,000 002 793 565	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{23.3^{11}}$	$=$	0,000 000 850 215
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{25.3^{12}}$	$=$ 0,000 000 260 733	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{27.3^{13}}$	$=$	0,000 000 080 473
$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{29.3^{14}}$	$=$ 0,000 000 024 974	
$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{31.3^{15}}$	$=$	0,000 000 007 788

$$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{33\cdot3^{16}} = 0{,}000\,000\,004\,238$$

$$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{35\cdot3^{17}} = \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}000\,000\,000\,766$$

$$\pi = 3{,}546\,233\,173\,718 - 0{,}404\,640\,518\,506$$
$$= 3{,}141\,592\,655\,212$$

Die Ludolfsche Zahl ist

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\ldots$$

Man sieht also, daß die obigen achtzehn berechneten Glieder diese Zahl schon ziemlich genau geben.

Zweite Methode aus §. 43. durch Sinus. Es war

$$x = \sin. x + \tfrac{1}{6}\sin. x^3 + \tfrac{3}{40}\sin. x^5 + \tfrac{5}{112}\sin. x^7 \ldots$$

Setzt man hier $\sin. x = 1$, das heißt: nimmt einen Bogen von 90° einen Quadranten an, der (für den Halbmesser 1) $= \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{40} + \tfrac{5}{112} + \tfrac{35}{1152} \text{ u. s. w.}$$
$$= 1{,}0000000$$
$$+ 0{,}1666666$$
$$+ 0{,}0750000$$
$$+ 0{,}0446428$$
$$+ 0{,}0303819$$
u. s. w.

Die obigen Glieder geben 1,3166913
aber $\frac{1}{2}\pi = 1{,}5707963$

Daraus erhellet, daß für den Sinus = 1 die Reihe sich viel zu langsam nähert, weil die Koeffizienten zu wenig abnehmen.

Man nehme also einen Sinus $= \frac{1}{2}$, das ist den Sinus von 30°, so nähert sich die Reihe

schnell, weil die Glieder nach Potenzen eines eigentlichen Bruchs fortgehen.

Will man viele Glieder berechnen, so ist es am bequemsten, die Rechnung recurrirend zu machen: d. h. jedes Glied aus seinem vorhergehenden abzuleiten. Wenn man nämlich die Glieder $\sin. x$; $\frac{1}{6}\sin. x^3$; $\frac{3}{40}\sin. x^5$ u. s. w. durch A; B; C u. s. w. bezeichnet, so ist Bogen von $30° = \frac{1}{6}\pi$.

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} = 0{,}500\,000\,000\,00$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{A} = 0{,}020\,833\,333\,33$$
$$\mathfrak{C} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{B} = 0{,}002\,343\,750\,00$$
$$\mathfrak{D} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{C} = 0{,}000\,348\,772\,32$$
$$\mathfrak{E} = \frac{7}{8}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{D} = 0{,}000\,059\,339\,74$$
$$\mathfrak{F} = \frac{9}{10}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{E} = 0{,}000\,010\,923\,91$$
$$\mathfrak{G} = \frac{11}{12}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{F} = 0{,}000\,002\,118\,26$$
$$\mathfrak{H} = \frac{13}{14}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{G} = 0{,}000\,000\,426\,17$$
$$\mathfrak{I} = \frac{15}{16}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{H} = 0{,}000\,000\,088\,14$$
$$\mathfrak{K} = \frac{17}{18}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{I} = 0{,}000\,000\,018\,62$$
$$\mathfrak{L} = \frac{19}{20}\cdot\frac{19}{21}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{K} = 0{,}000\,000\,004\,01$$
$$\mathfrak{M} = \frac{21}{22}\cdot\frac{21}{23}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{L} = 0{,}000\,000\,000\,87$$
$$\mathfrak{N} = \frac{23}{24}\cdot\frac{23}{25}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{M} = 0{,}000\,000\,000\,16$$
$$\mathfrak{O} = \frac{25}{26}\cdot\frac{25}{27}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{N} = 0{,}000\,000\,000\,04$$
$$\mathfrak{P} = \frac{27}{28}\cdot\frac{27}{29}\cdot\frac{1}{4}\mathfrak{O} = 0{,}000\,000\,000\,20$$

u. s. w.

Also $\frac{1}{6}\pi = 0{,}523\,598\,775\,57\cdots$

welches bloß noch in der letzten Stelle abweicht, wo 9 statt 7 stehen muß,

also $\pi = 3{,}141\,592\,653\,5\cdots$

Neunter Abschnitt.

Quadratur der Parabel und des Kreises.

§. 51. Aufgabe. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung. Das Differential der Fläche MNmn kann als Parallelogramm angesehen werden.

Es sey Halbparameter = p, Abscisse vom Scheitel = x, Ordinate = y,

so ist $MNmn = 2ydx$

$= 2\sqrt{2px}\,dx$

$= 2\sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$

Integrirens wegen $= 2\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\,dx$

Integral $= 2\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{8px^3}$

oder, da $2px = y^2$, also $8px = 4y^2$ ist

$= \frac{2}{3}\sqrt{4y^2 \cdot x^2}$

$= \frac{2}{3}\cdot 2yx.$

Die Constante ist Null, weil das Integral Null wird, wenn x Null ist.

Also: die Fläche der Parabel bis zu einer beliebigen Querlinie (2y) ist zwei Drittel des Rechtecks, welches diese Querlinie zur Grundlinie und die Abscisse zur Höhe hat.

§. 52. Aufgabe. Den Kreis zu quadriren.

Auflösung. Es sey Abscisse vom Mittelpunkte = z, Ordinate = y, so ist das Differen-

tial der Fläche des Quadranten $MPmp = ydz = \sqrt{r^2 - z^2}\, dz$ oder (den Halbmesser $= 1$ gesetzt) $= \sqrt{1 - z^2}\, dz$.

Die Potenz $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe verwandelt, ist also das Differential der Fläche

$$= (1 - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{8}z^4 - \tfrac{1}{16}z^6 - \tfrac{5}{128}z^8 \ldots)\, dz.$$

Integrirens wegen $= 1\, dz$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3z^2\, dz$$
$$- \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 5z^4\, dz$$
$$- \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{7} \cdot 7z^6\, dz$$
$$- \tfrac{5}{128} \cdot \tfrac{1}{9} \cdot 9z^8\, dz$$

u. s. w.

Integral $= z - \tfrac{1}{6}z^3 - \tfrac{1}{40}z^5 - \tfrac{1}{112}z^7 - \tfrac{5}{1152}z^9 \ldots$

Constante $=$ Null.

Für $z = 1$ wird die Fläche des Quadrant

$$= \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} \ldots$$

Aber die Reihe nähert sich zu langsam.

Zehnter Abschnitt.

Cubatur des Paraboloids und der Kugel.

§. 53. **Aufgabe.** Ein Paraboloid, d. h. einen Körper, der durch Umdrehung der Parabel um die Achse entsteht, zu cubiren.

Auflösung. Die unendlich dünne Scheibe MNmn, das Differential des Körpers, sey $= dK$,

so ist $dK = \pi y^2 dx$
$= \pi 2px dx$

Integral $K = \pi p x^2$
$= \frac{1}{2}\pi y^2 x.$

Das Paraboloid ist die Hälfte des Cylinders von derselben Grundfläche (πy^2) und Höhe (x).

§. 54. **Aufgabe.** Die Kugel zu cubiren.

Auflösung. Das Differential des Körpers ist $dK = \pi y^2 dx$
$= \pi x (2r - x) dx$
$= \pi r 2x dx - \pi x^2 dx$

Integrirens wegen $= \pi r 2x dy - \frac{1}{3}\pi 3x^2 dx$

Integral $K = \pi r x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3$
$= \pi x^2 (r - \frac{1}{3}x).$

Für $x = r$ wird das Segment die Halbkugel $= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Für $x = 2r$ wird das Segment die ganze Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

§. 55. **Zusatz.** Kegel, Paraboloid, Kugel und Cylinder von gleichen Durchmessern und Höhen verhalten sich

wie $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 1$,
oder wie $2 : 3 : 4 : 6$.

Eilfter Abschnitt.

Partielle Differentiale.

§. 56. Erklärung. Wenn eine Größe y eine Funktion von zwei veränderlichen Größen x und t ist, so kann man y so differentiiren, daß bloß x veränderlich gesetzt wird, und so, daß bloß t veränderlich gesetzt wird.

Die auf diese Art entstehenden Differentiale nennt man partielle.

Man kann sie durch eine Klammer andeuten: so bedeutet der Ausdruck $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ daß y so differentiirt sey, daß nur x veränderlich gesetzt, und dieses Differential durch dx dividirt ist; eben so bedeutet $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ daß y so differentiirt sey, daß nur t veränderlich gesetzt, und dieses Differential durch dt dividirt ist.

§. 57. Zusatz. Um aber nicht immer eines Nenners unter dem dy, und einer Klammer zu bedürfen, kann man auch so schreiben: $qm = {}^{x}dy$ und $MN = {}^{t}dy$. Wenn man qm wieder in Rücksicht bloß von t differentiirt, so erhält man $mq - nr = {}^{t}d\,{}^{x}dy$ und wenn MN wieder in Rücksicht bloß von x differentiirt wird, so ist dies $mn - MN = {}^{x}d.{}^{t}dy$. Diese Bezeichnung spricht sich deutlich aus, und ist leicht zu schreiben und in Druck zu setzen.

§. 58. Zusatz. Es ist ${}^t d\, {}^x dy = {}^x d\, {}^t dy$, das heißt: es ist einerlei, ob ich y erst in Rücksicht auf x, und was herauskömmt in Rücksicht auf t differentiire, oder ob ich umgekehrt y erst in Rücksicht auf t, und was herauskömmt in Rücksicht auf x differentiire; denn es ist $mq - nr = mn - qr = mn - MN$.

Für meinen Zweck ist diese Nachweisung hier hinlänglich.

§. 59. Lehrsatz. Wenn $\frac{{}^t dy}{dt} = K \frac{{}^x dy}{dx}$, so ist $\frac{{}^t d\, {}^t dy}{dt^2} = K^2 \frac{{}^x d\, {}^x dy}{dx^2}$.

Beweis. Man differentiire die gegebene Gleichung $\frac{{}^t dy}{dt} = K \frac{{}^x dy}{dx}$ zuerst auf beiden Seiten so, daß bloß x veränderlich gesetzt wird, so erhält man

$$\frac{{}^x d\, {}^t dy}{dt} = K \frac{{}^x d\, {}^x dy}{dx},$$

folglich I) $K \frac{{}^x d\, {}^t dy}{dK \cdot dt} = K^2 \frac{{}^x d\, {}^x dy}{dx^2}$.

Man differentiire ferner die gegebene Gleichung auf beiden Seiten so, daß bloß t veränderlich gesetzt wird, so erhält man

$$\frac{{}^t d\, {}^t dy}{dt} = K \frac{{}^t d\, {}^x dy}{dx},$$

folglich II) $\frac{{}^t d\, {}^t dy}{dt^2} = K \frac{{}^t d\, {}^x dy}{dx\, dt}$.

Das erste Glied der Gleichung I. ist aber dem zweiten Gliede in der Gleichung II. gleich (nach §. 35.), folglich auch das erste Glied der Gleichung II. gleich dem zweiten Gliede der Gleichung I.

folglich $\frac{{}^{t}d\,{}^{t}dy}{dt^2} = K^2 \frac{{}^{x}d\,{}^{x}dy}{dx^2}$,

welches zu erweisen war.

§. 60. Zusatz. Umgekehrt also auch, wenn $\frac{{}^{t}d\,{}^{t}dy}{dt^2} = K^2 \frac{{}^{x}d\,{}^{x}dy}{dx^2}$ ist, so kann man diese Gleichung, als aus der im §. 36. gegebenen entstanden ansehen und es ist $\frac{{}^{t}dy}{dt} = K \frac{{}^{x}dy}{dx}$.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Anhang.

Übersicht der Hauptfunktionen für die Linien zweiter Ordnung.

§. 1.

Erklärung. Die Beschaffenheit einer Linie wird durch das Verhalten zwischen Abscissen und Ordinaten bestimmt, und die Linien werden hienach in Ordnungen getheilt.

Eine Linie erster Ordnung ist die, wo in der Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten nur eine Dimension der veränderlichen Größen vorkommt. Die Gleichung $y = \frac{b}{a}x$ oder die Proportion $a : b = x : y$ giebt die gerade Linie als unbestimmt fortgezogene Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks, dessen Katheten a und b sind.

Linien zweiter Ordnung sind die, wo in der genannten Gleichung zwei Dimensionen der veränderlichen Größen vorkommen, also entweder x^2 oder y^2 oder xy. Von diesen ist hier die Rede.

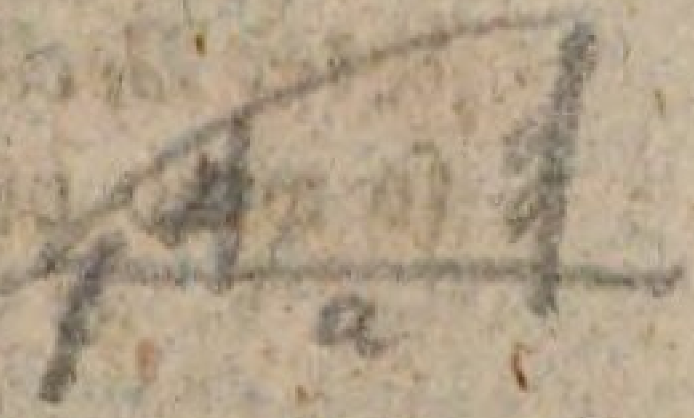
§. 2. Aufgabe 1. Eine Funktion für die Ordinate einer Linie zweiter Ordnung anzugeben.

Auflösung. Auf einer Abscissenlinie a, welche die halbe Hauptachse heiße, nehme man von ihrem Anfangspunkte aus, Abscissen vom Scheitel = x, oder von ihrem Endpunkte aus, Abscissen vom Mittelpunkte = z, und richte senkrechte Ordinaten = y auf.

Für eine bestimmte Abscisse vom Scheitel, die = f seyn mag und Brennweite heißt, sey die Ordinate = p, die der halbe Parameter heißt.

So kann man für eine Linie zweiter Ordnung allgemein setzen

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$



oder

$$y^2 = \frac{p(a^2 - z^2)}{a}.$$

Ersteres ist die Formel für die Ordinate als Funktion der Abscisse vom Scheitel.

Letzteres als Funktion der Abscisse vom Mittelpunkte.

Die letztere Formel entsteht aus der ersten, wenn man x = a — z setzt und umgekehrt.

Nämlich $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 = 2p(a - z) - \frac{p}{a}(a - z)^2$

$$= 2pa - 2pz - \frac{p(a^2 - 2az + z^2)}{a}$$

$$= \frac{2pa^2 - 2paz - pa^2 + 2paz - pz^2}{a} = \frac{pa^2 - pz^2}{a}.$$

§. 3. Zusatz. Setzt man a unendlich groß, so heißt die Linie eine Parabel, und die Gleichungen sind $y^2 = 2px$

und $y^2 = \frac{\infty}{\infty}$, welche hier nichts bestimmt; a und z werden beide unendlich.

Setzt man $a = p$, so wird die Linie ein Kreis.
Es ist $y^2 = 2ax - x^2$
und $y^2 = a^2 - z^2$.

Setzt man a ungleich p, aber positiv, so ist die Linie eine Ellipse, und die Formeln bleiben

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

$$y^2 = \frac{p(a^2 - z^2)}{a}.$$

Setzt man a negativ, also die Abscissen x auf ihrer Verlängerung rückwärts vom Anfangspunkte, so wird die Linie eine Hyperbel, und es ist

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

$$y^2 = \frac{p}{a}(z^2 - a^2).$$

§. 4. Aufgabe 2. Eine Funktion für die Abscisse anzugeben.

Auflösung. Aus Obigen folgt

$$x^2 - 2ax = -\frac{ay^2}{p}$$

und $$z^2 = a^2 \frac{- ay^2}{p}.$$

§. 5. Zusatz. Für die Parabel verschwindet x^2 gegen $2ax$,

folglich $$2ax = \frac{ay^2}{p}$$
$$x = \frac{y^2}{2p}$$
$$z = \infty.$$

Für den Kreis wo $a = p$,
ist $$x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2} = a \pm z$$
$$z^2 = a^2 - y^2.$$

Für die Ellipse
$$x = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{ay^2}{p}} = a \pm z$$
$$z^2 = a^2 - \frac{ay^2}{p}.$$

Für die Hyperbel
$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + \frac{ay^2}{p}} = z \mp a$$
$$z^2 = a^2 + \frac{ay^2}{p}.$$

§. 6. Zusatz. Für eine Ordinate gleich dem Halbparameter p, ist die Abscisse vom Scheitel = f, und es ist folglich Brennweite
$$f = a \pm \sqrt{a^2 - ap}$$
für die Parabel
$$f = \frac{p}{z} \left(\text{aus §. 5. } x = \frac{y^2}{2p}\right)$$
für den Kreis
$$f = a$$
für die Ellipse
$$f = a - \sqrt{a^2 - ap} = a - e$$
für die Hyperbel
$$f = -a + \sqrt{a^2 + ap} = e - a.$$

Brennweite ist Abstand des Scheitels vom nächsten Brennpunkte, daher hier kein Doppelzeichen gebraucht wird.

§. 7. Zusatz. Aus §. 6. folgt

$$p = 2f - \frac{f^2}{a}$$

für die Parabel $p = 2f$

für den Kreis $p = a$

für die Ellipse $p = 2f - \frac{f^2}{a}$

für die Hyperbel $p = 2f + \frac{f^2}{a}$.

§. 8. Aufgabe 3. Eine Funktion für den Vektor anzugeben.

Auflösung. In dem rechtwinklichten Dreiecke, wo der Vektor die Hypotenuse, die Ordinate die eine Kathete, ist die andre Kathete $x - f$.

Also $v^2 = y^2 + (x-f)^2$,

daraus findet sich $v^2 = \frac{(a-f)^2 x^2}{a^2} + \frac{2f(a-f)x}{a} + f^2$

also $v = \frac{(a-f)x}{a} + f$,

oder auch $v = \frac{(a-x)f}{a} + x = \frac{zf}{a} + x$

oder auch $v = \frac{a-x}{a}(a \pm \sqrt{a^2 - ap}) + x$

oder auch $v = \frac{a-x}{a}(a \pm e) + x$

oder auch $v = a \pm \frac{ez}{a}$.

Der Unterschied des Vectors und der Abscisse vom Scheitel ist $= \frac{(a-x)f}{a}$, welche $= i$ sey, $v = x \pm i$.

Der Unterschied des Vektors und der Halbachse ist $= \frac{ez}{a}$ oder $\frac{(a-f)(a-x)}{a}$, welches $= u$ sey, $v = a \pm u$.

§. 9. Zusatz. Daraus erhält man

für die Parabel $v = x + f$

für den Kreis $v = a$

für die Ellipse $v = a \pm \frac{ez}{a}$

für die Hyperbel $v = \frac{ez}{a} \mp a$.

Letzteres aus $v = \frac{zf}{a} + x$, wenn $f = e - a$ und $x = z \mp a$ gesetzt wird. (§. 5. 6.)

In der Ellipse ist der eine Vektor um $\frac{ez}{a}$ größer, der andere um eben so viel kleiner als die halbe Hauptachse.

In der Ellipse ist die ganze Hauptachse gleich der Summe der Vektoren.

In der Hyperbel ist die ganze Hauptachse gleich dem Unterschiede der Vektoren.

Aus diesen Eigenschaften nimmt man die genetischen Definitionen der Ellipse und Hyperbel her.

§. 10. Aufgabe 4. Eine Funktion für die Subnormale anzugeben.

Auflösung. Da der Vektorenwinkel von der Normale oder in der Hyperbel von der Tangente halbirt wird, so wird in dem Dreieck, welches die Vektoren zu Schenkeln, die Doppeleccentricität zur Grundlinie hat, diese letztere im

Verhältnisse der Schenkel geschnitten, und es ist $2a : v = 2e : k$, wenn nämlich der am Vektor v liegende Abschnitt der Grundlinie K heißt.

Also $$k = \frac{ev}{a} = \frac{a-f}{a} v$$
$$= \frac{a-f}{a} . \left(\frac{a-f}{a} . x + f\right) \text{ §. 8.}$$
$$= \frac{(a-f)^2}{a^2} x + \frac{a-f}{a} . f.$$

Die Subnormale sey $= N$,

also $$N = k - (x-f)$$
$$= \frac{(a-f)^2}{a^2} x + \frac{a-f}{a} f - x + f.$$

Das giebt nach gehöriger Rechnung
$$N = \frac{2f(a-x)}{a} - \frac{f^2}{a^2}(a-x) = 2v - \frac{f}{a} v$$
$$= \frac{2f(a-f)}{a^2}(a-x)$$
$$= \frac{p}{a}(a-x) \text{ §. 7.}$$

§. 11. Zusatz. Daraus ergiebt sich die Subnormale

für die Parabel $N = p$ eine beständige Größe,

für den Kreis $N = a - x$

für die Ellipse $N = \frac{p}{a}(a-x) = 2v - \frac{f}{a} v$

für die Hyperbel $N = \frac{p}{a}(a+x) = 2v + \frac{f}{a} v.$

§. 12. Aufgabe 5. Eine Funktion für die Normale anzugeben.

Auflösung. Die Normale OM sey $= Q$.

Es ist $$Q^2 = y^2 + N^2$$
$$= \frac{p}{a}\left((2ax - x^2) + \frac{p}{a}(a-x)^2\right)$$

Statt

Statt des $\frac{p}{a}$ innerhalb der Klammer, setze man (aus §. 7.) $\frac{2f}{a} - \frac{f^2}{a^2}$, so erhält man

$$Q^2 = \frac{p}{a}\left(2ax - x^2 + \frac{2f}{a}(a-x)^2 - \frac{f^2}{a^2}(a-x)^2\right)$$
$$= \frac{p}{a}[2ax - x^2 + 2i(a-x) - i^2] \text{ §. 8.}$$
$$= \frac{p}{a}[2ax - (x+i)^2 + 2i(a-x) + 2xi]$$
$$= \frac{p}{a}[2ax - (x+i)^2 + 2ai]$$
$$= \frac{p}{a}[2a(x+i) - (x+i)^2]$$
$$= \frac{p}{a}(2av - v^2).$$

§. 13. Zusatz. Also für die einzelnen Linien;
für die Parabel $Q^2 = 2pv$
für den Kreis $Q^2 = a^2$ oder $Q = a =$ Halbm.
für die Ellipse $Q^2 = \frac{p}{a}(2av - v^2)$
für die Hyperbel $Q^2 = \frac{p}{a}(2av + v^2)$.

§. 14. Zusatz. Wenn man von dem Punkte O, wo die Normale auf die Achse stößt, senkrechte Linien OR nach jedem Vektor zieht, so schneiden diese auf jeden Vektor ein gleiches Stück ab, nämlich MR, welches ich die Apotome nennen will. Es ist nach Planim. §. 230.

$$MR = \frac{OM^2 + FM^2 - FO^2}{2FM}$$

das ist $$MR = \frac{Q^2 + v^2 - K^2}{2v}.$$

Hier ist $Q = \frac{p}{a}(2av - v^2)$ (§. 12.)

und $v^2 - k^2 = v^2 - \frac{(a-f)^2}{a^2} v^2$ (§. 10.)

$$= \frac{a^2 v^2 - a^2 v^2 + 2afv^2 - f^2 v^2}{a^2}$$

$$= \frac{2af - f^2}{a} v^2 = \frac{p}{a} v^2 \text{ (§. 7.)}$$

folglich $MR = \frac{p\, 2av}{a\, 2v} = p.$

Die Apotomen der Vektoren sind bei allen Linien zweiter Ordnung gleich dem Halbparameter.

§. 15. Aufgabe. Eine Funktion für die Subtangente anzugeben.

Auflösung. Es sey die Subtangente NT $= M$. Im rechtwinklichten Dreieck OMT ist

$$TN \cdot NO = NM^2$$

$$M \cdot N = y^2$$

$$M = \frac{y^2}{N},$$

aber $y^2 = \frac{p}{a} x (2a - x)$ (§. 2.)

und $N = \frac{p}{a}(a - x)$

folglich $M = \frac{x \cdot (2a - x)}{a - x}.$

§. 16. Zusatz. Also für die einzelnen Linien; für die Parabel $M = 2x$

für den Kreis $M = \frac{x \cdot (2a - x)}{a - x}$

für die Ellipse $M = \frac{x \cdot (2a - x)}{a - x}$

für den Hyperbel $M = \frac{x \cdot (2a + x)}{a + x}.$

§. 17. Aufgabe. Eine Funktion für die Tangente anzugeben.

Auflösung. Es sey die Tangente = T.

Es ist $T^2 = M(M+N)$

für die Parabel $= 2x(2x+p)$.

§. 18. Erklärung. Linien vom Brennpunkte auf die Tangente senkrecht gezogen, wie FP : G(P), nenne ich Kürze wegen Tangentenlothe und bezeichne sie durch P.

§. 19. Aufgabe. Eine Funktion für das Tangentenloth anzugeben.

Auflösung. In den ähnlichen Dreiecken MOR und FMP ist OM : MR = MF : FP,

das ist $Q : p = v : P$, (§. 14.)

also $P = \frac{pv}{Q}$.

Auch ist $P^2 = \frac{p^2 v^2}{Q^2}$

$= \frac{apv}{2a-v}$. (§. 12.)

Für die Parabel $P^2 = \frac{1}{2}pv$

für den Kreis $P = a =$ Halbmesser selbst.

§. 20. Erklärung. Halbmesser der Krümmung nennt man den Halbmesser eines Kreises, dessen Krümmung mit der, einer Stelle einer krummen Linie übereinkommt.

§. 21. Aufgabe. Eine Funktion für den Krümmungshalbmesser anzugeben.

Auflösung. An zwei unendlich nahe an einander liegenden Punkten der krummen Linie seyen die Tangenten mMP und MnL und auf sie die Tangentenlothe FP und FL. Man beschreibe mit FM einen Bogen Mr, so ist rm das Differential des Vektors = dv. Man beschreibe mit Mm einen Bogen mq und mit FL einen Bogen Lp (der von dem Stücke Lp der Tangente MnL nicht zu unterscheiden ist,) so ist Pp das Differential des Tangentenloths = dP. Es sey CM der Krümmungshalbmesser = r.

In den ähnlichen Dreiecken PMp und MCm ist 1) Pp : PM = Mm : CM.

In den ähnlichen Dreiecken PFm und Mrm ist Pm : Fm = mr : Mm.
Aber Pm = PM + Mm
und Fm = FM + rm.

Da hier Mm gegen PM und rm gegen FM verschwindet, so ist die Verhältniß Pm : FM von der PM : FM nicht verschieden;
also 2) PM : FM = mr : Mm.

Aus den Proportionen 1) und 2) folgt

$$Pp : FM = mr : CM$$
$$dP : v = dv : r$$
$$r = \frac{rdv}{dP}.$$

Dies ist eine allgemeine Formel für alle krumme Linien.

Für Linien der zweiten Ordnung ist nun $P = \frac{pv}{Q}$, also $P.Q = p.v.$ (zwei gleiche Rechtecke, wo nur p eine beständige Größe ist).

Differentiirt

$$Q.dP + P.dQ = p.dv,$$

mit Q multiplizirt

$$Q^2 dP + P.Q.dQ = Qpdv$$

$$Q^2 dP = Qpdv - P.QdQ$$

$$= Qpdv - pvdQ$$

$$dP = \frac{Qpdv - pvdQ}{Q^2}.$$

Also

$$r = \frac{rdv}{dP}$$

$$= \frac{Q^2 vdv}{Qpdv - pvdQ}.$$

Um hier im Nenner dQ durch dv auszudrücken, hat man

$$Q^2 = \frac{p}{a}(2av - v^2) \text{ (§. 12.)}$$

$$aQ^2 = 2apv - pv^2.$$

Differentiirt

$$2aQdQ = 2apdv - 2pvdv$$

$$dQ = \frac{apdv - pvdv}{aQ}$$

Also

$$r = \frac{Q^2 vdv}{Qpdv - pv\frac{apdv - pvdv}{aQ}}$$

$$= \frac{Q^3 avdv}{Q^2 apdv - ap^2 vdv + p^2 v^2 dv}$$

$$= \frac{Q^3 av}{Q^2 ap - ap^2 v + p^2 v^2}.$$

Im Nenner ist hier aber wiederum $Q^2 = 2pv - \frac{p}{a}v^2$,

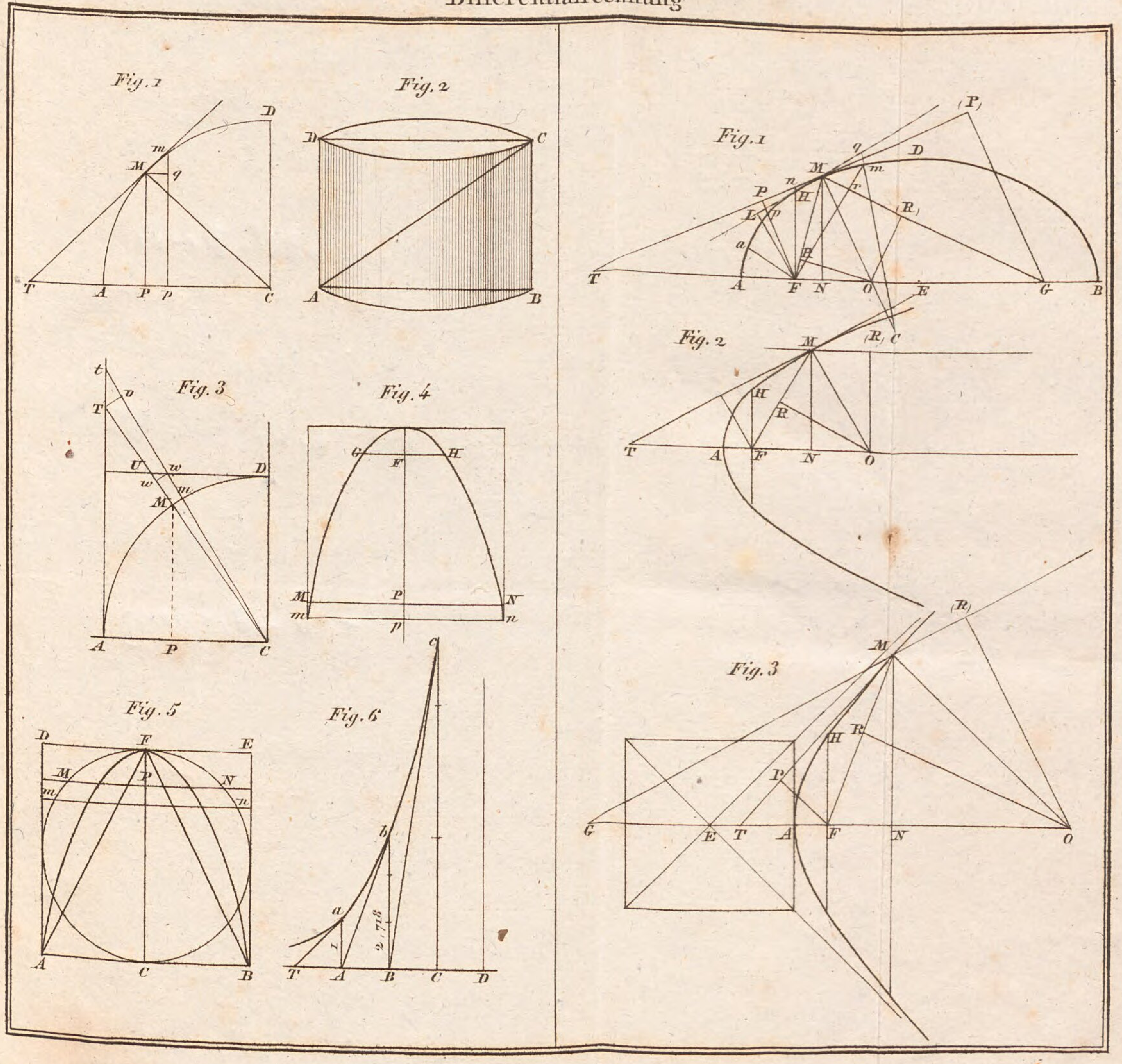
also $$r = \frac{Q^3 av}{2p^2 av - p^2 v^2 - ap^2 v + p^2 v^2} = \frac{Q^3}{p^2}.$$

Der Halbmesser der Krümmung ist gleich dem Cubus der Normale, dividirt durch das Quadrat des Halbparameters.

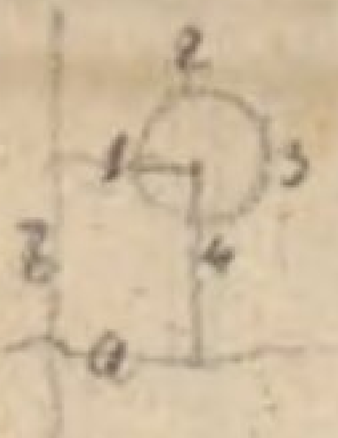
Verbesserung.

Seite 37 Zeile 4 und 6, und Seite 39 Zeile 10 ist Integral statt Integrat zu setzen.

Differentialrechnung



$Mx^2 + Nx + Oxy + Py^2 + Ry + S = 0$



$x_1 = a - r$	$x_2 = a$	$x_3 = a + r$	$x_4 = a$
$y_1 = b$	$y_2 = b + r$	$y_3 = b$	$y_4 = b - r$

1) $Ma^2 - 2Mar + Mr^2 + Na - Nr + Oab - Obr$
$+ Pb^2 + 2P\,Rb + S = 0$

2) $Ma^2 + Na + Oab + Oar + Pb^2 + 2Pbr + Pr^2$
$+ Rb + Rr + S = 0$

1) 2) $M(r^2 - 2ar) - Nr - Or(b + r) - 2Pbr - Pr^2 - Rr = 0$

3) $Ma^2 + 2Mar + Mr^2 + Na + Nr + Oab - Obr + Pb^2$
$+ Rb + S = 0$

4) $Ma^2 + Na + Oab - Oar + Pb^2 - 2Pbr + Pr^2 + Rb - Rr + S = 0$

3) 4) $M(r^2 + 2ar) + Nr + P(r^2 - 2b) + Rr = 0$

add. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$: $M(r^2 - 2ar + r^2 + 2ar) + 2Nr - P(r^2 + 2b + r^2 - 2b) = 0$

$2Mr^2 + 2Nr - 2Pr^2 = 0$

$Mr + N - Pr = 0$

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vieth, Gerhard Ulrich Anton,

Kurze Anleitung zur Differentialrechnung als Ergänzung zum Lehrbuche der reinen Mathematik

Leipzig 1823

Math.p. 741 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083300-9